ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————o0o———————

HOÀNG THỊ NHUNG

HIỆU ỨNG TRƠN VÀ TÍNH CHẤT FREDHOLM ĐỐI VỚI CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG HYPERBOLIC CẤP MỘT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

——————o0o——————

HOÀNG THỊ NHUNG

HIỆU ỨNG TRƠN VÀ TÍNH CHẤT FREDHOLM ĐỐI VỚI CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG HYPERBOLIC CẤP MỘT

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRỊNH THỊ DIỆP LINH

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là sự trình bày và tìm hiểu bài báo của riêng tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. TRỊNH THỊ DIỆP LINH. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực.

Tác giả

Hoàng Thị Nhung

Xác nhận của khoa chuyên môn	**Xác nhận của người hướng dẫn**
	TS. Trịnh Thị Diệp Linh

Lời cảm ơn

Để hoàn thành đề tài luận văn và kết thúc khóa học, với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi có môi trường học tập tốt trong suốt thời gian tôi học tập, nghiên cứu tại trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới TS. Trịnh Thị Diệp Linh đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn tốt nghiệp này. Đồng thời, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn tới thầy cô trong Khoa Toán, bạn bè đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn tốt nghiệp này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 05 năm 2019

Tác giả

Hoàng Thị Nhung

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Lời mở đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Hiệu ứng trơn đối với các phương trình đạo hàm riêng hyperbolic cấp một . . . 3

1.2 Lý thuyết Fredholm . . . 7

1.3 Điều kiện biên . . . 8

1.3.1 Điều kiện biên tuần hoàn . . . 9

1.3.2 Điều kiện biên tuyến tính của dạng địa phương . . . 10

1.3.3 Hiện tượng trơn cho bài toán biên ban đầu . . . 12

2 Hiệu ứng trơn và tính chất Fredholm đối với các phương trình đạo hàm riêng Hyperbolic cấp một **15**

2.1 Hiệu ứng trơn . . . 15

2.1.1 Trường hợp điều kiện biên cổ điển . . . 15

2.1.2 Trường hợp điều kiện biên tích phân trong các mô hình cấu trúc tập hợp . . . 21

2.1.3 Trường hợp điều kiện biên phân tán và bài toán tuần hoàn . . . 24

2.2 Tính chất Fredholm với bài toán tuần hoàn . . . 28

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

Lời mở đầu

Trái với phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng parabolic, tính chất Fredholm và dáng điệu chính quy của các bài toán hyperbolic đã được biết ít hơn. Một số kết quả trong luận văn này và phần mở rộng nhấn mạnh vào hiện tượng trơn, xây dựng các tham số và tính chất Fredholm. Một bước quan trọng trong nghiên cứu phương trình vi phân phi tuyến (các phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng parabolic) là thiết lập khả năng tuyến tính hóa Fredholm trong các trường hợp hyperbolic. Vì tính kỳ dị của phương trình hyperbolic nửa tuyến tính, dọc theo các đường cong đặc trưng, nghiệm không phải là nghiệm chính quy trong miền nguyên trên biên. Nó được gọi là chính quy khi xuất hiện sai số của tính trơn. Vì vậy phân tích tính chất Fredholm về các bài toán hyperbolic đòi hỏi phải thiết lập sự tối ưu của tính chính quy giữa không gian của các nghiệm và vế phải của các phương trình vi phân. Các bước giải quyết tính chất Fredholm thường dựa trên thực tế cơ bản là bất kỳ toán tử Fredholm nào độ chính xác là một sự nhiễu compact của một toán tử song ánh. Trong trường hợp hyperbolic bằng cách sử dụng tính compact, argument trở nên phức tạp bởi vì toàn bộ miền thiếu tính chính quy trên phương pháp tiếp cận của bài báo được nghiên cứu. Dựa trên thực tế là đối với một loạt các toán tử biên, nghiệm cải thiện độ trơn một cách tự động. Sau k lần liên tục có thể thay đổi cho từng trường hợp của k. Các kết quả như vậy được chứng minh và trình bày trong chương II. Khi đó thấy rằng trong một số trường hợp, hiện tượng trơn đã được trình bày sớm hơn trong các tài liệu [3,4,10,11]. Hiện tượng này cho phép chúng ta xây dựng một tham số. Trình bày một cách tiếp cận chung để chứng minh tính chất Fredholm cho các phương trình đạo hàm riêng cấp một và áp dụng nó vào các bài toán tuần hoàn. Kết quả Fredholm bao gồm các hệ thống hyperbolic không ngặt với các hệ số gián đoạn, nhưng chúng cũng đúng trong trường hợp hyperbolic ngặt và hệ số trơn. Từ một số quan điểm chung, hiệu ứng trơn và tính chất Fredholm đóng một vai trò quan trọng trong nghiên cứu sự rẽ nhánh Hopf và đồng thời trong phương trình đạo hàm riêng hyperbolic phi tuyến [1] thông qua định lý hàm ẩn và các nghiên cứu của Lyapunov – Schmidt [2,5].

Luận văn trình bày lại bài báo [9] với phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo bao gồm 2 chương

Chương 1: Trình bày các kiến thức chuẩn bị

Chương 2: Nội dung chính của luận văn trình bày về hiệu ứng trơn và tính chất Fredholm đối với các phương trình đạo hàm riêng hyperbolic cấp một.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Hiệu ứng trơn đối với các phương trình đạo hàm riêng hyperbolic cấp một

Đặt

$$\Pi_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, T < t < \infty\}.$$

Ở đây ta sẽ nghiên cứu vấn đề:

$$(\partial_t + a(x,t)\partial_x + b(x,t))u = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$u_j(0,t) = (Ru)_j(t), 1 \leq j \leq m, \tag{1.3}$$

$$u_j(1,t) = (Ru)_j(t), m < j \leq n.$$

trong nửa giải Π_0 và bài toán (1.1), (1.3) trong dải $\Pi_{-\infty}$. Trong đó $u = (u_1, ..., u_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$ và $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ là vectơ của các hàm có giá trị thực, $b = \{b_{jk}\}_{j,k=1}^n$ và $a = diag(a_1, ..., a_n)$ là các ma trận chéo của các hàm có giá trị thực và $0 \leq m \leq n$ là số nguyên cố định. Hơn nữa, ánh xạ R: $C(\overline{\Pi}_0)^n \to C([0,\infty))^n$ là toán tử, tương tự với R trong $\Pi_{-\infty}$. Trong miền đang xét, giả sử rằng

$$a_j > 0, \forall j \leq m \text{ và } a_j < 0, \forall j > m, \tag{1.4}$$

$$\inf_{x,t}|a_j| > 0, \forall j \le n. \tag{1.5}$$

và với mọi $1 \le j \ne k \le n$ tồn tại $p_{jk} \in C^1([0,1] \times \mathbb{R})$ sao cho

$$b_{jk} = p_{jk}(a_k - a_j), \text{ và } p_{jk} = 0 \tag{1.6}$$

Đặc biệt, điều kiện (1.4) là đúng trong các mô hình sóng laze và động lực sóng di chuyển cũng như động học hóa học, trong đó hàm u_j cho $j \le m$ (tương ứng, $m+1 \le j \le n$). Điều kiện (1.5) được hiểu là tất cả các tính chất của (1.1) bị chặn và không suy biến. Cuối cùng, điều kiện (1.6) là điều kiện Levy thường xuất hiện để bù lại cường độ hyperbol không nghiêm ngặt, trong đó các hệ số a_j và a_k đối với một số $j \ne k$ trùng nhau tại một điểm, ví dụ tại (x_0, t_0).

Chúng ta sẽ áp dụng các giả thiết của tính trơn sau đây trên dữ liệu ban đầu: Giả sử a, b và f là C^∞- trơn trong tất cả các đối số của chúng trong các miền tương ứng, trong đó φ chỉ được giả thiết là các hàm liên tục

Từ (1.1), (1.3) dọc theo các đường cong đặc trưng, cho $j \le n, x \in [0,1]$ và $t \in \mathbb{R}$, đặc trưng thứ j của (1.1) đi qua điểm (x,t) được định nghĩa như là nghiệm $\xi \in [0,1] \mapsto \omega_j(\xi; x,t) \in \mathbb{R}$ của giá trị ban đầu bài toán

$$\partial_\xi \omega_j(\xi; x,t) = \frac{1}{a_j(\xi, \omega_j(\xi; x,t))}, \omega_j(x; x,t) = t. \tag{1.7}$$

Xác định

$$c_j(\xi, x, t) = \exp \int_x^\xi \frac{b_{jj}}{a_j}(\eta, \omega_j(\eta; x,t)) d\eta, d_j(\xi, x, t) = \frac{c_j(\xi, x, t)}{a_j(\xi, \omega_j(\xi; x,t))}.$$

Do (1.5) đường cong đặc trưng $\tau = \omega_j(\xi; x,t)$ đạt đến biên của Π_T trong hai điểm với các tọa độ riêng biệt. Cho $x_j(x,t)$ biểu thị hoành độ của điểm đó có tung độ nhỏ hơn. Các phép tính đơn giản cho thấy rằng C^1 - ánh xạ $u : [0,1] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ là một nghiệm từ (1.1) - (1.3) khi nó thỏa mãn hệ